

# Об одном варианте задачи Хуа-ло-Кена

А. Киркорян, Д. Толев\*

## Аннотация

В работе доказано, что почти все натуральные числа  $n$ , удовлетворяющие  $n \equiv 3 \pmod{24}$ ,  $n \not\equiv 0 \pmod{5}$ , представимы суммой трех квадратов простых чисел, хотя бы одно из которых можно записать в виде  $1 + x^2 + y^2$ .

В 1938-ом году Хуа-ло-Кен [8] доказал, что почти все натуральные числа  $n$ , для которых выполнены условия

$$n \equiv 3 \pmod{24}, \quad n \not\equiv 0 \pmod{5} \quad (1)$$

можно представить в виде

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n, \quad (2)$$

где  $p_1, p_2, p_3$  — простые числа. С тех пор многие математики исследовали разрешимость этого уравнения в простых числах, удовлетворяющих дополнительным условиям. Например, в работе [11] установлено, что почти все  $n$ , для которых выполнено (1), можно представить в виде (2), где простые  $p_j$  таковы, что каждое из чисел  $p_1 + 2$  и  $p_2 + 2$  имеет не более 5 простых множителей, а  $p_3 + 2$  — не более 8 простых множителей.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение (2) с простыми числами, хотя бы одно из которых можно представить в виде  $1 + x^2 + y^2$ , где  $x$  и  $y$  — целые числа. Бесконечность множества простых чисел такого вида установил Ю. В. Линник [2]. Точнее, он доказал асимптотическую формулу

$$\sum_{p \leq x} r(p-1) = \pi \prod_{p > 2} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x(\log \log x)^7}{(\log x)^{1+\theta}}\right), \quad (3)$$

где  $r(m)$  равно числу решений уравнения  $m = x^2 + y^2$  в целых числах,  $\chi(d)$  — неглавный характер по модулю 4 и

$$\theta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e \log 2 = 0.0029 \dots \quad (4)$$

---

\*При финансовой поддержке Софийского Университета, грант 028/2009

Условное доказательство формулы (3) (с использованием расширенной гипотезы Римана) было ранее предложено Хооли [6]. Доказательство формулы (3) можно найти еще в книгах Линника [3] и Хооли [4].

Наш результат — следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $N$  — большое число. Обозначим через  $\mathcal{A}$  множество натуральных чисел  $n$ , удовлетворяющих (1) и непредставимых суммой трех квадратов простых чисел, хотя бы одно из которых можно записать в виде  $1 + x^2 + y^2$ . Пусть  $A(N)$  — число элементов из  $\mathcal{A}$ , не превосходящих  $N$ . Тогда имеет место неравенство

$$A(N) \ll N(\log N)^{-0.0019}. \quad (5)$$

Ранее Матомаки [10] и Толев [12] получили результаты такого типа, связанные с бинарной проблемой Гольдбаха. Толев [13] доказал также, что каждое достаточно большое нечетное число можно представить в виде суммы трех простых чисел, хотя бы два из которых вида  $1 + x^2 + y^2$ .

В настоящей работе мы приведем только схему доказательства теоремы, поскольку (довольно длинные) вычисления близки или проводятся тем же способом как в других работах, на которые мы ссылаемся в данной работе.

#### Схема доказательства.

1. Для любого натурального числа  $n \leq N$  рассмотрим сумму

$$R(n) = \sum_{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n} r(p_1 - 1)(\log p_1)(\log p_2)(\log p_3). \quad (6)$$

Обозначим

$$L = \log N, \quad X = N^{1/2}, \quad D = X^{1/2} L^{-1000000}. \quad (7)$$

Наша цель — установить существование величины  $M(n) = M_N(n)$  для которой:

1) Если выполнено (1), то для любого  $n \leq N$  имеем

$$\sqrt{n}(\log L)^{-10} \ll M(n) \ll \sqrt{n}(\log L)^{10}. \quad (8)$$

2) Для суммы

$$E(N) = \sum'_{n \leq N} |R(n) - M(n)|, \quad (9)$$

где  $\sum'$  означает, что суммирование ведется по натуральным числам, удовлетворяющим (1), имеет место оценка

$$E(N) \ll N^{3/2} L^{-\theta_0 + \varepsilon}, \quad (10)$$

где  $\theta_0$  определено через (4), а  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малое.

Допустим, что для некоторого  $M(n)$  условия (8) и (9) выполнены. Из определений множества  $\mathcal{A}$  и суммы  $R(n)$  следует, что если  $n \in \mathcal{A}$ , то  $R(n) = 0$ . Тогда, если  $\Delta$  — параметр для которого  $1 < \Delta < N$ , то используя (8) — (10) получаем

$$\begin{aligned} N^{3/2}L^{-\theta_0+\varepsilon} &\gg E(N) \geq \sum_{\substack{\Delta < n \leq N \\ n \in \mathcal{A}}} |R(n) - M(n)| = \sum_{\substack{\Delta < n \leq N \\ n \in \mathcal{A}}} |M(n)| \\ &\gg (A(N) - \Delta) \Delta^{1/2} (\log L)^{-10}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A(N) \ll \Delta + N^{3/2}L^{-\theta_0+\varepsilon} \Delta^{-1/2}.$$

Выбирая  $\Delta = NL^{-2\theta_0/3}$  и используя (4) получаем оценку (5).

**2.** Итак, займемся определением  $M(n)$  и доказательством (8) и (9).

Пользуясь известной формулой  $r(m) = 4 \sum_{d|m} \chi(d)$  и также (6), представим  $R(n)$  в виде

$$R(n) = 4(R_1(n) + R_2(n) + R_3(n)), \quad (11)$$

где

$$R_1(n) = \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \left( \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d \leq D}} \chi(d) \right) (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \quad (12)$$

$$R_2(n) = \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \left( \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right) (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \quad (13)$$

$$R_3(n) = \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \left( \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d \geq X/D}} \chi(d) \right) (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3). \quad (14)$$

Тогда из (9) и (11) следует

$$E(N) \ll E_1(N) + E_2(N) + E_3(N), \quad (15)$$

где

$$E_1(N) = \sum'_{n \leq N} |4R_1(n) - M(n)|, \quad (16)$$

$$E_j(N) = \sum'_{n \leq N} |R_j(n)|, \quad j = 2, 3. \quad (17)$$

Из (15) следует, что для получения (10) достаточно оценить соответствующим способом величин  $E_j(N)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**3.** Исследование  $R_1(n)$  и  $R_3(n)$  сводится к рассмотрению суммы

$$I_{l,d;J}(n) = \sum_{\substack{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n \\ p_1 \equiv l \pmod{d} \\ p_1 \in J}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \quad (18)$$

где  $d$  и  $l$  — взаимно простые натуральные числа, а  $J \subset [1, X]$  — отрезок. Если  $J = [1, X]$ , то будем писать для простоты  $I_{l,d}(n)$ .

Для изучения величины  $I_{l,d;J}(n)$  применяем круговой метод. Очевидно

$$I_{l,d;J}(n) = \int_0^1 S_{l,d;J}(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha,$$

где, как обычно,  $e(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha)$  и

$$S_{l,d;J}(\alpha) = \sum_{\substack{p \in J \\ p \equiv l \pmod{d}}} (\log p) e(\alpha p^2), \quad S(\alpha) = S_{1,1;[1,X]}(\alpha). \quad (19)$$

Определим множества больших и, соответственно, малых дуг через

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leq Q} \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \left[ \frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau} \right], \quad \mathfrak{m} = \left[ -\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right] \setminus \mathfrak{M}, \quad (20)$$

где

$$Q = L^{20000}, \quad \tau = X^2 L^{-50000}. \quad (21)$$

Тогда имеем

$$I_{l,d;J}(n) = I_{l,d;J}^{(1)}(n) + I_{l,d;J}^{(2)}(n), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} I_{l,d;J}^{(1)}(n) &= \int_{\mathfrak{M}} S_{l,d;J}(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha, \\ I_{l,d;J}^{(2)}(n) &= \int_{\mathfrak{m}} S_{l,d;J}(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (23)$$

(Как и раньше, если  $J = [1, X]$ , то будем писать для простоты  $I_{l,d}^{(\nu)}(n)$ .)

Определим

$$H_J(n) = \frac{1}{8} \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n \\ \sqrt{m_1} \in J}} (m_1 m_2 m_3)^{-1/2}.$$

Хорошо известно (см. например [1], гл. 2), что

$$H(n) = H_{[1, X]}(n) = \frac{\pi}{4} \sqrt{n} + O(1) \quad (24)$$

Для каждого  $n$ , удовлетворяющего (1), определим мультипликативную по отношению к  $q$  функцию  $t_{l,d,n}(q)$  следующими равенствами.

$$t_{l,d,n}(2) = 1, \quad t_{l,d,n}(4) = 2, \quad t_{l,d,n}(8) = 4, \quad t_{l,d,n}(2^\nu) = 0 \quad \text{для } \nu > 3. \quad (25)$$

Если  $p > 2$  — простое число, то

$$t_{l,d,n}(p^\nu) = 0 \quad \text{для } \nu > 1, \quad (26)$$

$$t_{l,d,n}(p) = \begin{cases} h_0(p, n) & \text{для } p \nmid d, \\ h_1(p, n, l) & \text{для } p \mid d, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$h_0(p, n) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{-n}{p}\right)p^2 + 3\left(\left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{-1}{p}\right)\right)p + 1}{(p-1)^3} & \text{если } p \nmid n, \\ \frac{-3\left(\frac{-1}{p}\right)p - 1}{(p-1)^2} & \text{если } p \mid n, \end{cases} \quad (28)$$

$$h_1(p, n, l) = \begin{cases} \frac{\left(-2\left(\frac{n-l^2}{p}\right) - \left(\frac{-1}{p}\right)\right)p - 1}{(p-1)^2} & \text{если } p \nmid n - l^2, \\ \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)p + 1}{p-1} & \text{если } p \mid n - l^2 \end{cases} \quad (29)$$

и где  $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$  — символ Лежандра.

Далее, следуя метода работы [11] (см. стр. 81–84), получим

$$I_{l,d;J}^{(1)}(n) = I_{l,d;J}^*(n) + O\left(L^{200000} \sum_{q \leq Q} \Delta(X, [d, q])\right) + O(X\tau^4(d)d^{-1}L^{-1000}), \quad (30)$$

где

$$I_{l,d;J}^*(n) = \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{q \leq Q} t_{l,d,n}(q) H_J(n), \quad (31)$$

через  $[d, q]$  обозначено наименьшее общее кратное  $d$  и  $q$ ,  $\varphi(d)$  — функция Эйлера,  $\tau(d)$  — число положительных делителей  $d$  и

$$\Delta(x, h) = \max_{y \leq x} \max_{(l, h)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq y \\ p \equiv l \pmod{h}}} \log p - \frac{y}{\varphi(h)} \right|.$$

4. Рассмотрим сначала  $E_3(N)$ . В силу того, что

$$\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d \geq X/D}} \chi(d) = \sum_{\substack{m|p_1-1 \\ m \leq (p_1-1)D/X}} \chi\left(\frac{p_1-1}{m}\right) = \sum_{j=\pm 1} \chi(j) \sum_{\substack{m|p_1-1 \\ m \leq (p_1-1)D/X \\ \frac{p_1-1}{m} \equiv j \pmod{4}}} 1$$

из (14) и (18) следует

$$R_3(n) = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) I_{1+jm, 4m; J_m}(n),$$

где  $J_m = [1 + mX/D, X]$ . Следовательно из (22) получаем

$$R_3(n) = R_3^{(1)}(n) + R_3^{(2)}(n), \quad (32)$$

где

$$R_3^{(\nu)}(n) = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) I_{1+jm, 4m; J_m}^{(\nu)}(n), \quad \nu = 1, 2. \quad (33)$$

Тогда из (17) и (32) следует

$$E_3(N) \ll E_3^{(1)}(N) + E_3^{(2)}(N), \quad (34)$$

где

$$E_3^{(\nu)}(N) = \sum'_{n \leq N} \left| R_3^{(\nu)}(n) \right|, \quad \nu = 1, 2. \quad (35)$$

Рассмотрим  $E_3^{(2)}(N)$ . В силу (23) и (33) имеем

$$R_3^{(2)}(n) = \int_{\mathfrak{m}} K(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha,$$

где

$$K(\alpha) = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) S_{1+jm, 4m; J_m}(\alpha).$$

Тогда, применяя неравенства Коши и Бесселя, получим

$$\begin{aligned}
E_3^{(2)}(N) &\ll X \left( \sum_{n \leq N} \left| \int_{\mathfrak{m}} K(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\ll X \left( \int_{\mathfrak{m}} |K^2(\alpha) S^4(\alpha)| d\alpha \right)^{1/2} \\
&\ll X \sup_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)| \left( \int_0^1 |K^4(\alpha)| d\alpha \right)^{1/4} \left( \int_0^1 |S^4(\alpha)| d\alpha \right)^{1/4}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Сумму  $S(\alpha)$ , определенную через (19), можно оценить на множество малых дуг методом И.М.Виноградова. Пользуясь, например, результатом работы [7] и имея ввиду (20) и (21) получаем

$$\sup_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)| \ll XL^{-500}. \quad (37)$$

Хорошо известно также, что

$$\int_0^1 |S^4(\alpha)| d\alpha \ll X^2 L^7. \quad (38)$$

Далее, используя тот же метод, как и в работе [11] (см. стр. 67–69), получаем

$$\int_0^1 |K^4(\alpha)| d\alpha \ll X^2 L^{1200}. \quad (39)$$

Тогда из (7), (36) – (39) следует

$$E_3^{(2)}(N) \ll N^{3/2} L^{-10}. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь  $E_3^{(1)}(N)$ . Из (30), (31), (33) и (35) следует, что

$$R_3^{(1)}(N) = R^* + O \left( L^{200000} \sum_{m \leq M} \sum_{q \leq Q} \Delta(X, [4m, q]) \right) + O(XL^{-100}), \quad (41)$$

где

$$R^* = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \varphi(4m)^{-1} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) \sum_{q \leq Q} t_{1+jm, 4m, n}(q) H_{J_m}(n).$$

Используя (25) – (29), нетрудно проверить, что выражение  $t_{1+jm,4m,n}(q)$  не зависит от  $j$ . Тогда имеем  $\sum_{j=\pm 1} \chi(j)t_{1+jm,4m,n}(q) = 0$ , откуда следует, что  $R^* = 0$ .

Далее, как в работе [11], стр. 82–83, используем теорему Бомбьери–Виноградова и имея ввиду (7) устанавливаем, что первый остаточный член в правой части (41) дает в  $E_3^{(1)}$  вклад  $O(X^3L^{-10})$ . Таким образом получаем

$$E_3^{(1)}(N) \ll N^{3/2}L^{-10}. \quad (42)$$

Тогда, в силу (34), (40) и (42), имеем

$$E_3(N) \ll N^{3/2}L^{-10}. \quad (43)$$

**5.** Рассмотрим теперь сумму  $E_2(N)$ . Обозначим через  $\mathcal{F}$  множество простых чисел  $p \leq X$  таких, что  $p-1$  имеет делитель, находящийся на отрезке  $[D, X/D]$ . Используя неравенство Коши и также (13), получаем

$$\begin{aligned} E_2(N)^2 &\leq N \sum_{n \leq N} |R_2(n)|^2 \\ &\ll NL^6 \sum_{\substack{p_1, \dots, p_6 \leq X \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_4^2 + p_5^2 + p_6^3}} \left| \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right| \left| \sum_{\substack{t|p_4-1 \\ D < t < X/D}} \chi(t) \right| \\ &\ll NL^6 \sum_{\substack{p_1, \dots, p_6 \leq X \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_4^2 + p_5^2 + p_6^3 \\ p_4 \in \mathcal{F}}} \left| \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right|^2. \end{aligned}$$

Слагаемые в последнем выражении, для которых  $p_1 = p_4$ , дают вклад  $O(N^{5/2+\varepsilon})$ . Следовательно

$$E_2(N)^2 \ll N^{5/2+\varepsilon} + NL^6 \Sigma_0, \quad (44)$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{p_1 \leq X} \left| \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right|^2 \sum_{\substack{p_4 \leq X \\ p_4 \in \mathcal{F} \\ p_4 \neq p_1}} \sum_{\substack{p_2, p_3, p_5, p_6 \leq X \\ p_2^2 + p_3^2 - p_5^2 - p_6^2 = p_4^2 - p_1^2}} 1.$$

Далее, используем, что равномерно по  $h$  удовлетворяющим  $1 \leq |h| \leq N$ , число решений уравнения  $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = h$  в простых числах  $p_1, p_2, p_3, p_4 \leq X$  оценивается сверху величиной  $O(NL^{-4})$ . Доказательство этого утверждения можно получить,

пользуясь методом работы [5]. Вычисления аналогичны (и намного проще) и по этой причине мы их не приводим. Таким образом получаем

$$\Sigma_0 \ll NL^{-4} \Sigma' \Sigma'', \quad (45)$$

где

$$\Sigma' = \sum_{p \leq X} \left| \sum_{\substack{d|p-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right|^2, \quad \Sigma'' = \sum_{\substack{p \leq X \\ p \in \mathcal{F}}} 1.$$

Суммы очень похожие на  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  оцены в [4], гл. 5. Работая тем же способом, получим

$$\Sigma' \ll XL^{-1}(\log L)^7, \quad \Sigma'' \ll XL^{-1-2\theta_0}(\log L)^3, \quad (46)$$

где  $\theta_0$  определено через (4). Из (44) – (46) следует

$$E_2(N) \ll N^{3/2}L^{-\theta_0}(\log L)^5. \quad (47)$$

**6.** Рассмотрим наконец сумму  $E_1(N)$ . В силу (12), (16), (18) и (22) имеем

$$E_1(N) \ll E_1^{(1)}(N) + E_1^{(2)}(N), \quad (48)$$

где

$$E_1^{(1)}(N) = \sum'_{n \leq N} \left| 4 \sum_{d \leq D} \chi(d) I_{1,d}^{(1)}(n) - M(n) \right|,$$

$$E_1^{(2)}(N) = \sum'_{n \leq N} \left| \sum_{d \leq D} \chi(d) I_{1,d}^{(2)}(n) \right|.$$

Сумму  $E_1^{(2)}(N)$  оцениваем тем же способом как  $E_3^{(2)}(N)$  и получаем

$$E_1^{(2)}(N) \ll N^{3/2}L^{-10}. \quad (49)$$

Рассмотрим  $E_1^{(1)}(N)$ . Сначала, чтобы получить приближенное значение для  $I_{1,d}^{(1)}(n)$ , воспользуемся формулой (30). Вклад остатков в правой части (30) оцениваем тем же методом как при рассмотрении  $E_3^{(1)}(N)$ . Используем также (24) и получаем

$$E_1^{(1)}(N) \ll E^* + N^{3/2}L^{-10}, \quad (50)$$

где

$$E^* = \sum'_{n \leq N} \left| \pi \sqrt{n} \sum_{d \leq D} \frac{\chi(d)}{\varphi(d)} \sum_{q \leq Q} t_{1,d,n}(q) - M(n) \right|.$$

Заменим теперь сумму по  $q$  в последней формуле произведением

$$P = 8 \prod_{2 < p \leq Q} (1 + t_{1,d,n}(p))$$

и, воспользовавшись опять методом работы [11] (см. стр. 85–86), оценим вклад возникающих остатков. Далее, в силу (27), величину  $P$  можно записать в виде

$$P = 8 \xi_n \theta(d),$$

где

$$\xi_n = \xi_{n,Q} = \prod_{2 < p \leq Q} (1 + h_0(p, n)), \quad \theta(d) = \theta_{n,Q}(d) = \prod_{\substack{2 < p \leq Q \\ p|d}} \frac{1 + h_1(p, n, 1)}{1 + h_0(p, n)}. \quad (51)$$

Отметим, что в силу (21), (28) и (51) имеем

$$(\log L)^{-2} \ll \xi_n \ll (\log L)^2. \quad (52)$$

Таким образом, получаем

$$E^* \ll E^{**} + N^{3/2} L^{-10}, \quad (53)$$

где

$$E^{**} = \sum'_{n \leq N} |8\pi \sqrt{n} \xi_n \Sigma(n) - M(n)|, \quad (54)$$

и

$$\Sigma(n) = \Sigma_Q(n) = \sum_{d \leq D} f(d), \quad f(d) = f_{n,Q}(d) = \chi(d) \varphi(d)^{-1} \theta(d). \quad (55)$$

Осталось найти асимптотическую формулу для  $\Sigma(n)$  и определить  $M(n)$  таким образом, чтобы сумма  $E^{**}$  была возможно наименьшей. Используя (28), (29) и (51), нетрудно проверить, что равномерно по  $n \leq N$  имеет место оценка.

$$f(d) \ll (\log \log d)^{10} d^{-1} \quad (56)$$

Тогда бесконечный ряд

$$\Phi(s) = \Phi_{n,Q}(s) = \sum_{d=1}^{\infty} f(d) d^{-s}$$

абсолютно сходится в полуплоскости  $Re(s) > 0$ . Используя формулу Перрона (см. [9], гл. 1) и имея ввиду (56) после некоторых вычислений получаем

$$\Sigma(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{10} - iX}^{\frac{1}{10} + iX} \frac{D^s}{s} \Phi(s) ds + O(N^{-1/100}), \quad (57)$$

Функция  $f(d)$  мультипликативна по отношению к  $d$ . Следовательно, применяя тождество Эйлера и имея ввиду (55) находим

$$\Phi(s) = L(s+1, \chi) \mathcal{N}(s), \quad (58)$$

где  $L(s, \chi)$  — ряд Дирихле, соответствующий характером  $\chi$  и

$$\mathcal{N}(s) = \mathcal{N}_{n, Q}(s) = \prod_p \left( 1 + \frac{\chi(p) (p\theta_n(p) - p + 1)}{p^{s+1}(p-1)} \right). \quad (59)$$

Пользуясь известными свойствами  $L$ -рядов Дирихле и также определением (51) для  $\theta(d)$  видим, что функция  $\Phi(s)$  имеет аналитическое продолжение в полуплоскости  $Re(s) > -1$ . Хорошо известно, что  $L(s+1, \chi) \ll 1 + |Im(s)|^{1/6}$  если  $Re(s) \geq -1/2$ . Кроме того, из (28), (29), (51) и (59) следует, что  $\mathcal{N}(s) \ll N^\varepsilon$  если  $Re(s) \geq -1/2$ . Следовательно из (58) следует, что

$$\Phi(s) \ll N^\varepsilon X^{1/6} \quad \text{если} \quad Re(s) \geq -1/2, \quad |Im(s)| \leq X. \quad (60)$$

Применяя теорему вычетов видим, что интеграл в правой части (57) равен

$$2\pi i \Phi(0) + \int_{\gamma} \frac{D^s}{s} \Phi(s) ds, \quad (61)$$

где  $\gamma$  — ломанная линия определена точками  $\frac{1}{10} - iX$ ,  $-\frac{1}{2} - iX$ ,  $-\frac{1}{2} + iX$ ,  $\frac{1}{10} + iX$ . Используя (7) и (60) видим, что вклад интеграла из (61) оценивается величиной  $O(N^{-1/100})$ . Таким образом получаем

$$\Sigma(n) = \frac{\pi}{4} \mathcal{N}(0) + O(N^{-1/100}). \quad (62)$$

Заметим, что из (28), (29), (51) и (59) следует

$$(\log L)^{-5} \ll \mathcal{N}(0) \ll (\log L)^5. \quad (63)$$

Тогда, если определим

$$M(n) = 2\pi^2 \sqrt{n} \xi_n \mathcal{N}(0), \quad (64)$$

то в силу (48), (49), (50), (53), (54) и (62) имеем

$$E_1(N) \ll N^{3/2} L^{-10}. \quad (65)$$

**7.** Итак, из (52), (63) и (64) получаем неравенство (8). С другой стороны, в силу (15), (43), (47) и (65), выполнена оценка (10).

С этим заканчивается доказательство теоремы.

## Список литературы

- [1] Р.Вон, *Метод Харди-Литтлвуда*, Москва, „Мир“, 1985.
- [2] Ю.В.Линник, *Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди-Литтлвуда*, Изв. АН СССР, сер. матем. 24 (1960), 629–706.
- [3] Ю.В.Линник, *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах*, Ленинград, Изд. ЛГУ, 1961.
- [4] К.Хооли, *Применения методов решета в теории чисел*, Москва, „Наука“, 1987.
- [5] J. Brüdern, E. Fouvry, *Lagrange’s Four Squares Theorem with almost prime variables*, J. Reine Angew. Math. 454 (1994), 59–96.
- [6] C. Hooley, *On the representation of a number as the sum of two squares and a prime*, Acta Math. 97 (1957), 189–210.
- [7] A. Ghosh, *The distribution of  $\alpha p^2$  modulo 1*, Proc. London Math. Soc. (3) 42 (1981), 252–269.
- [8] L.K.Hua, *Some results in the additive prime number theory*, Quart. J. Math., 9 (1938), 68–80.
- [9] A.A.Karatsuba *Complex Analysis in Number Theory*, CRC Press, 1995.
- [10] K.Matomäki, *The binary Goldbach problem with one prime of the form  $p = k^2 + l^2 + 1$* , J. Number Theory, 128, (2008), 1195–1210.
- [11] D.I.Tolev, *Additive problems with prime numbers of special type*, Acta Arith. 96, 11 (2000), 53–88. Corrigendum: Acta Arith. 105, 2, (2002), 205.
- [12] D.I.Tolev, *The binary Goldbach problem with arithmetic weights attached to one of the variables*, Acta Arith., (в печати).
- [13] D.I.Tolev, *The ternary Goldbach problem with arithmetic weights attached to two of the variables*, J. Number Theory, (в печати).

Факультет Математики и Информатики,  
СУ „Св. Климент Охридский“,  
ул. „Дж. Баучер“ 5,  
1164 София, Болгария

logaritym@abv.bg  
dtolev@fmi.uni-sofia.bg